Załącznik 2
AUTOREFERAT

28 lutego 2014

1 Imię i nazwisko

Dorota Mozyrska

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/artystyczne – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

- Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, grudzień 2001.
  Tytuł rozprawy doktorskiej: *Lokalna obserwowalność nieskończenie wymiarowych skończenie określonych układów dynamicznych z wyjściem.*
  Promotor: prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz (Politechnika Białostocka)
  Recenzenci: prof. dr hab. Andrzej Fryszkowski (Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska), prof. dr hab. Bronisław Jakubczyk (Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk)

- Magister w zakresie matematyki, z wynikiem bardzo dobrym, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Warszawski, Filia w Białymstoku, 1992.

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/artystycznych

- Od września 2012r: Prodziekan ds Promocji i Współpracy Wydziału Informatyki, Politechnika Białostocka.
- Od 2007r.: Adiunkt, Katedra Matematyki, Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka.
- Od 2004-2008: Adiunkt, Wyższa Szkoła Matematyki i Informatyki Użytkowej, Białystok.
- 2002-2007: Adiunkt, Katedra Matematyki, Instytut Matematyki i Fizyki, Politechnika Białostocka.
- 1992-2002: Asystent, Katedra Matematyki, Instytut Matematyki i Fizyki, Politechnika Białostocka.

4 Wykazanie osiągnięcia wynikającego z art. 12 ust. 2 z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego

Opracowanie warunków dotyczących sterowalności i obserwowalności ciągłych i dyskretnych układów sterowania z operatorami niecałkowitych rzędów.

4.2 Autor/autorzy, tytuł/tytuły, rok wydania, nazwa wydawnictwa

Wybrane publikacje w danej tematyce:

1. **D. Mozyrska(70%)**, D. F. M. Torres(30%). Modified optimal energy and initial memory of fractional continuous–time linear systems. *Signal Processing*, 91(1): 379–385, 2011; DOI: 10.1016/j.sigpro.2010.07.016; IF: 1.503; 5-Year IF: 1.567; 27pkt.

2. **D. Mozyrska(60%)**, E. Pawłuszewicz(40%). Fractional discrete–time linear control systems with initialisation. *International Journal of Control*, 85(2):213–219, 2012; DOI: 10.1080/00207179.2011.643413; IF:1.008; 5-Year IF: 1.289; 25pkt.

3. **D. Mozyrska(50%)**, E. Pawłuszewicz(50%). Observability of linear q–difference fractional order systems with finite initial memory.*Bulletin of the Polish Academy of Sciences.* Technical Sciences, 58(4):601–605, 2010; ISSN (Print) 0239-7528, DOI: 10.2478/v10175-010-0061-z; IF: 0.945 ; 20pkt.

4. **D. Mozyrska(70%)**, Z. Bartosiewicz(30%). On observability of nonlinear discrete-time fractional-order control systems. rozdz. w: New trends in nanotechnology and fractional calculus applications, chapter *Springer Science and Business Media*, 2009:305–312. 7pkt.

5. **D. Mozyrska(60%)**, E. Pawłuszewicz(40%). Local controllability of nonlinear discrete-time fractional order systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Technical Sciences*, 61(1):1–6, 2013; DOI: 10.2478/bpasts-2013-0024; IF: 0.980; 5-Year IF: 0.927; 30pkt.

6. **D. Mozyrska(40%)**, E. Girejko(30%), M. Wyrwas(30%). Fractional nonlinear systems with sequential operators. *Central European Journal of Physics*, 11(10): 1295–1303, 2013; DOI: 10.2478/s11534-013-0223-3; IF: 0.905; 5-Year IF 0.832; 20pkt.

7. **D. Mozyrska**. Multi–parameter fractional difference linear control systems, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, V. 2014(Article ID 183782):8p., DOI: 10.1155/2014/183782 2014.; IF: 0.82; 5-Year IF: 0.84, 30pkt.

8. **D. Mozyrska(60%)**, E. Pawłuszewicz(40%). Controllability of h-difference linear control systems with two fractional orders. *International Journal of Systems Science*, 2013; DOI: 10.1080/00207721.2013.794907; IF: 1.305; 5-Year IF: 1.504; 25pkt.

**IF podany wg JCR Science Edition zgodnie z rokiem publikacji. W przypadku lat 2013-2014 podany jest wg JCR Science Edition 2012. Punktacja wg wykazu M. N.i Sz. W. z dnia 17-12-2013r. w przypadku publikacji z 2013-2014r., z dnia 20-12-2012 w przypadku publikacji z 2012 roku, dla pozostałych przypadków wg wykazu z 25-06-2010 roku.*

W nawiasach podany jest średni procentowy wkład poszczególnych autorów w powstanie pracy.

4.3 Omówienie celu naukowego/artystycznego ww. prac/pracy i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Niniejszy rozdział stanowi przewodnik po publikacjach wchodzących w skład osiagnięcia naukowego zgodnie z art. 16 ust. 2 z dnia 14 marca 2003r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.).

4.3.1 Wstęp

Moje badania skupiają się głównie na opracowaniu własności układów sterowania z operatorami niecałkowitych rzędów. Zajmuję się układami sterowania określonymi operatorami niecałkowitych rzędów. Rozważane typy opratorów to: Riemanna-Liouville'a i Caputo - w przypadku układów z czasem ciągłym oraz Riemanna-Liouville'a, Caputo i Grünwalda-Letnikova – układy z czasem dyskretnym. Dla układów sterowania określonych tymi operatorami rozwiązano zagadnienia sterowalnośći i obserwowalności, zarówno w przypadku tego samego niecałkowitego rzędu w każdym równaniu, jak i rozważono różne rzędy i różne kroki (w przypadku układów z czasem dyskretnym). Można wyróżnić następujące kluczowe obszary prowadzonych badań:

1. układy sterowania z operatorami niecałkowitych rzędów z **pamięcią początkową**;
2. własności **nieliniowych** układów sterowania z operatorami niecałkowitych rzędów;

3. **wieloparametryczne** ze względu na rząd lub krok liniowe układy sterowania z czasem dyskretnym i operatorami niecałkowitych rzędów.

Główną motywacją prowadzenia badań własności układów sterowania niecałkowitych rzędów jest fakt, że układy tego typu stały się ważnym narzędziem w modelowaniu wybranych procesów. Jak pisze prof. Katsuyuki Nishimoto w tytule książki [80]: *„Fractional Calculus is Calculus in the 21st Century"*. Natomiast, prof. Piotr Ostalczyk pisze w pracy [84]: *„Dlaczego ciągłe zjawiska fizyczne realnego świata opisują równania różniczkowe o rzędach ze zbioru dyskretnego* $\{1, 2, 3, \ldots\}$ *a nie ciągłego* $(0, +\infty)$*?"*.

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu dotyczy pochodnych i całek dowolnego rzędu (niekoniecznie całkowitego, czy nawet wymiernego), jednocześnie jest dziedziną powstałą na bazie klasycznych definicji analizy matematycznej dotyczącej całek i pochodnych, [26, 28, 31, 84, 92]. W tym rozumieniu powszechnie znany, „klasyczny" rachunek różniczkowo-całkowy nie stanowi dziedziny odrębnej a jest tylko przypadkiem szczególnym bardziej ogólnego rachunku niecałkowitych czy też "ułamkowych" rzędów. Dla rzędów całkowitych z ogólnych definicji i wzorów rachunku niecałkowitego rzędu otrzymujemy ponownie pochodne i całki odpowiedniego rzędu.

W dalszej części niniejszego dokumentu będę używać wymiennie określeń: *„ułamkowy układ/układ niecałkowitego rzędu"*, *„ułamkowa pochodna/pochodna niecałkowitego rzędu"*, w odniesieniu, iż rząd pochodnej lub całki może być uogólniony do innego niż całkowity. Wyrażenie *„ułamkowy"* wskazywałoby na *„wymierny"*, natomiast można rozważać rzędy rzeczywiste, czy też również zespolone.

Historia rachunku różniczkowego i całkowego niecałkowitego rzędu rozpoczyna się od 1695r., kiedy to L'Hôspital postawił w liście do Leibniz'a pytanie: *„Then what would be the one-half derivative of x?"(wolne tłumaczenie: Czym mogłaby być pochodna rzędu 1/2?)*, a Leibniz odpowiada *„Leads to an apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn." (wolne tłumaczenie: Prowadzi do pozornego paradoksu, z którego pewnego dnia zostaną wyciągnięte użyteczne konsekwencje.)*

Rozwój rachunku ułamkowego/niecałkowitego rzędu został zainicjowany przez prace napisane przez G.W. Leibniza (1695r.) i L. Eulera (1738r.), [84]. Kolejne prace powstały w 19. wieku, można zauważyć następujące nazwiska autorów: P.S. Laplace, S. F. Lacroix, J. B. J. Fourier, N. H. Abel, J. Liouville, A. K. Grünwald, A. V. Letnikov, G. F. B. Riemann, H. Laurent, J. Hadamard. Następne kroki postawiono dopiero w drugiej połowie dwudziestego wieku. Z tego okresu pochodzą następujące monografie: [36, 81, 91, 92]. W zastosowaniach najbardziej intensywny rozwój rachunku ułamkowego rzędu zaobserwowano na początku 21. wieku. Ostatnio dla wielu naukowców jest to główny obszar ich zainteresowań naukowych. Co więcej, rachunek niecałkowitego rzędu znalazł w ostatnich latach zastosowanie w modelowaniu i rozwiązywaniu problemów praktycznych. Poważne osiągnięcia zostały omówione na przykład w pracach: [3,11,13,22,26,28,32,33,37,82,84,94].

Wiele zjawisk fizycznych, takich jak dyfuzja, teoria kondensatorów, teoria obwodów, materiałoznawstwo, znacznie dokładniej opisuje się za pomocą równań różniczkowych niecałkowitych rzędów. W szczególności użycie układów niecałkowitych rzędów, w przypadku zarówno ciągłym jak i dyskretnym, jako nowego narzędzia w modelowaniu pozwala na większe możliwości w teorii układów sterowania, [84].

Jednakże, rozwój teorii dotyczącej rachunku niecałkowitego rzędu w przypadku dyskretnym nie był tak intensywny. Idea operatarów różnicowych (delta i nabla) niecałkowitych rzędów jest oparta na uogólnieniu sumowania na niecałkowity rząd. Podstawowe własności dotyczące sum (odpowiedników całek) i operatorów różnicowych niecałkowitego rzędu zostały opracowane przez Millera i Rossa w [36]. Badania kontynuowane były przez Atici i Eloe [4,5], Chen, Luo i Zhou [12], Baleanu i Abdeljawada [1,2]. Inna koncepcja sum i operatorów niecałkowitych rzędów została wprowadzona w pracach: [6,7,16]. Wymienione prace dotyczą operatorów niecałkowitego rzędu typu Riemanna-Liouville'a oraz Caputo. Trzeci z podstawowych operatorów różnicowych niecałkowitego rzędu, które rozważano w pracach, został nazwany operatorem niecałkowitego rzędu typu Grünwalda-Letnikova. Operator ten jest używany w modelowaniu układów sterowania w pracach między innymi autorów: Kaczorek, Bettayeb and Djennoune, Busłowicz, Dzieliński, Klamka, Ostalczyk [9, 10, 15, 24, 26, 27, 30, 84, 85, 93] dla przypadków kroku $h = 1$ oraz bardziej ogólnego $h > 0$.

Jest powszechnie wiadome, że równania różniczkowe są używane do opisu sygnałów analogowych a równania różnicowe do opisu układów z sygnałami dyskretnymi czy cyfrowymi. Ponadto, równania różnicowe mogą być użyte do aproksymacji równań różniczkowych, w szczególności przy użyciu odpowiednich implementacji w programach komputerowych, co pozwala na różnego typu symulacje numeryczne.

W pracach [38, 39, 59] pokazano, że operatory typu Riemanna-Liouville'a i Grünwalda-Letnikova są równoważne. Różnica polega głównie na innych dziedzinach zmiennej stanu użytej w układzie. Jednocześnie teoria związana i wypracowna dla operatora typu Riemanna-Liouville'a daje możliwość określenia formuły rozwiązania jawnego liniowego zagadnienia początkowego dla ułamkowych układów sterowania, również w przypadku użycia operatora typu Grünwalda-Letnikova. Idea użycia układów z różnymi rzędami i krokiem w każdym równaniu jest najbardziej ogólną sytuacją, którą opracowałam w pracy [39]. W tej pracy ustaliłam i udowdniłam warunki sterowalności i obserwowalności wieloparametrowych (różne rzędy i kroki) układów liniowych używając rozwiązań jawnych, nierekurencyjnych. Można wówczas korzystać z tych samych wyników dla $h = 1$ i jednolitego rzędu. Wykazałam ponadto, że uzyskane rezultaty nie zależą od typu operatora i kroku h. Dokonałam porównania układów z różnymi operatorami pod względem: (a) liczby kroków potrzebnych do osiągnięcia założonego punktu docelowego, (b) rozróżnienia warunków początkowych dla poszczególnych operatorów.

Nierzadko można usłyszeć opinię, że badania naukowe dotyczące teorii układów nie pozostają w ścisłym związku z praktyką i zastosowaniami. Z drugiej jednak strony, rezultaty zebrane w twierdzenia, ze ścisłymi dowodami, np. istnienia, jednoznaczności, warunków rzędu, czy postaci jawnych rozwiązań są podstawą/katalizatorem dla badań praktycznych. Ponadto, dobre podejście matematyczne w teorii sterowania dla nowego rodzaju układów, układów niecałkowitego rzędu, jest „*sine qua non*" dla ich zastosowań.

4.3.2 Układy sterowania z operatorami niecałkowitych rzędów z pamięcią początkową

Pochodne i operatory różnicowe niecałkowitego rzędu to operacje z pamięcią, [91,95]. Co prawda, można mówić, o tym że klasyczna pochodna też niesie ze sobą pamięć warunku początkowego, gdyż w rozwiązaniach zagadnień początkowych warunek ten występuje, ale pochodna niecałkowitego rzędu zachowuje pamięć na całym odcinku działania od momentu startu do danego czasu t. W związku z tym powstaje pytanie, czy pamięć układu nie powinna zaczynać się wcześniej, zanim jeszcze wystąpi start operatora.

W tym obszarze badań zajęto się ułamkowymi układami dwóch typów: z czasem ciągłym oraz z czasem dyskretnym. Problem dobrego postawienia zagadnienia początkowego dla ułamkowych układów był dokładnie badany w pracach: [21,34–36,83]. Prawidłowa interpretacja i wybór warunków początkowych, a raczej pamięci początkowej jest kluczowa dla rozwiązań i zrozumienia ułamkowych równań różniczkowych i różnicowych.

- Główne wyniki dotyczące układów z pochodną albo różnicą niecałkowitego rzędu z pamięcią poczatkową znajdują się w pracach: [66, 74]. W pracy [74]:

- **D. Mozyrska(70%)**, D. F. M. Torres(30%). Modified optimal energy and initial memory of fractional continuous-time linear systems. *Signal Processing*, 91(1): 379–385, 2011;DOI: 10.1016/j.sigpro.2010.07.016; IF: 1.503; 5-Year IF: 1.567;

rozważamy liniowy układ sterowania z pamięcią początkową i niecałkowitym rzędem $0 < \alpha \leqslant 1$: $D^{\alpha}_{0+}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$, gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, macierze $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, razem z danym wektorem pamięci: $\psi(t)\,, t \leqslant 0$. Rozważono sterowania kawałkami stałe $u(\cdot)$. W artykule uwzględniono pochodną ułamkową o następującej postaci z pamięcią początkową $D^{\alpha}_{0+}x(t) ={}_0 d^{\alpha}_t x(t) + \psi(t)$, gdzie ${}_0d^{\alpha}_t x(t)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)(t-\tau)^{-\alpha}d\tau = \frac{d}{dt}\left(I^{1-\alpha}_{t_0+}\varphi(t)\right)$ jest lewostronną pochodną Riemanna-Liouville'a funkcji $x(\cdot)$ z $t_0 = 0$, ψ jest wektorem pamięci początkowej wyznaczonym następująco: $\psi(t) = \lim\limits_{\omega\to-\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\omega}^{0}\frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)$. Dodatkowo wprowadzono w tej pracy pamięć rzędu β liczoną z trajektorii „do przodu" $\gamma(t,\psi,u)$ dla $t > 0$: $M_\beta := I^{\beta}_{0+}\gamma(t,\psi,u) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \gamma(t,\psi,u)(t-\tau)^{\beta-1}$.

W artykule [74]

- udowodniono postać wzoru dla trajektorii układu z pamięcią początkową;
- zdefiniowano pojęcia sterowalności z pamięcią danego rzędu;
- wprowadzono pojęcie gramianu β-sterowalności:
  $Q_T = \int_0^T (T-t)^{2(1-\alpha-\beta)}\Phi_\beta(T-t)BB^*\Phi^*_\beta(T-t)dt$ wraz z udowodnieniem twierdzenia i faktów na temat formuły sterowania.

Główne twierdzenie w [74] ma postać

Twierdzenie 4.1 *Niech $T > 0$ i Q_T będzie macierzą nieosobliwą. Wtedy,*

(a) dla dowolnych stanów pamięci a, $b \in \mathbb{R}^n$ sterowanie o wartościach $\overline{u}(t) = -(T-t)^{2(1-\alpha-\beta)}B^*\Phi^*_\beta(T-t)Q_T^{-1}f_T(a,b)$, gdzie $f_T(a,b) = -b + \Phi_\beta(T)a$, przeprowadza stan a do b w czasie T.

(b) Spośród wszystkich możliwych sterowań ze zbioru $L^2_\alpha([0,T],\mathbb{R}^m)$ przeprowadzających stan pamięci a do b w czasie T, sterowanie $\overline{u}$ minimalizuje zmodyfikowaną całkę energii $\mathcal{E}^{\alpha,\beta}(u) := \int_0^T \left|(T-t)^{\alpha+\beta-1}u(t)\right|^2 dt$.

- Dyskusję ułamkowych układów dyskretnych z pamięcią początkową podjęto w artykule [66]:

  - **D. Mozyrska(60%)**, E. Pawłuszewicz(40%). Fractional discrete-time linear control systems with initialisation. *International Journal of Control*, 85(2):213–219, 2012; DOI: 10.1080/00207179.2011.643413; IF:1.008; 5-Year IF: 1.289; 25pkt.

W tej pracy zdefiniowano operator różnicowy niecałkowitego rzędu działający na funkcji rzeczywistej z uwzględnieniem czasu początkowego $t_0 \in \mathbb{R}$ i wartości początkowych l-pamięci/(pamięci długości l). Definicja zapewnia istnienie i jednoznaczność wartości trajektorii dla wszystkich $t \geqslant t_0$. Główne wyniki pracy [66] to:

- zbadanie i określenie rekurencyjnej formuły rozwiązania dla ułamkowych układów dyskretnych z pamięcią początkową i operatorem typu Grünwalda-Letnikova;
- udowodnienie warunku koniecznego i wystarczającego obserwowalności omawianych układów ze skończoną pamięcią początkową i określenie sterowania zapewniającego osiągalność stanów układu;
- postawienie oryginalnego problemu obserwowalności liniowych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu z l-pamięcią początkową.

Klasyczne pojęcie obserwowalności układu oznacza, że dany układ jest obserwowalny na odcinku czasu, jeżeli z wiedzy o wartościach wyjścia układu możemy jednoznacznie zrekonstruować stan początkowy układu. W tym przypadku, zdefiniowano relację nieodróżnialności zdarzeń pamięci, które mogą być traktowane jak nowe „wydłużone" stany początkowe. Prawo sterowania natomiast odniesiono do kontekstu osiągania danego stanu w s kolejnych krokach działania układu. Ułamkowy operator różnicowy użyty w opisywanej pracy, [66], jest oparty na definicji operatora typu Grünwalda-Letnikova używanego w pracach [20, 23, 24, 26, 93]: $\left(\Delta^{\alpha}_{t_0,l}x\right)(t) = \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{[\frac{t-t_0}{h}+l]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(t-jh)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ i dla $t \leqslant t_0$ jest $x(t) = \varphi(t)$ a φ jest daną funkcją. Wyrażenie $k = [\frac{t-t_0}{h}]$ oznacza część całkowitą wartości $\frac{t-t_0}{h}$, $h > 0$, a czynnik $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-j+1)j!} = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!}, & j = 1, 2, \ldots \end{cases}$. Rozważane układy mają wtedy postać: $\left(\Delta^{\alpha}_{t_0,l}\right)(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t = t_0 + kh, k \in \mathbb{N}_0$

a dla $t \leqslant t_0$: $x(t) = \varphi(t)u_a(t)$. Układ rozważany jest wraz z liniowym wyjściem $y(t) = Cx(t)$.

- W pracy [63]:

  - **D. Mozyrska(50%)**, E. Pawłuszewicz(50%). Observability of linear q-difference fractional order systems with finite initial memory. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 58(4):601–605, 2010; ISSN (Print) 0239-7528, DOI: 10.2478/v10175-010-0061-z; IF: 0.945 ; 20pkt.

zdefiniowano klasę liniowych q-różnicowych układów niecałkowitego rzędu ze skończoną pamiecią. Dla tego typu układów

- określono definicję nieodróżnialności stanów i obserwowalności układu poprzez „wydłużenie" warunku początkowego z uwzględnieniem pamięci;
- wykazano prawdziwość wzoru rozwiązania zagadnienia początkowego z l-pamięcią;
- udowodniono warunek konieczny i wystarczający obserwowalności omawianych układów.

We wspomnianej pracy [63] określone jest zagadnienie początkowe poprzez warunki początkowe pamięci związane z wartościami danej funkcji φ, która zeruje się w nieskończenie wielu punktach dziedziny zbioru $q^{\mathbb{Z}} = \{q^k,\ k \in \mathbb{Z},\ q > 1\}$. W ten sposób otrzymano tylko skończoną liczbę niezerowych wartości funkcji φ. Zbiór tych wartości nazwany został l-pamięcią. Może on być traktowany jak szczególny przypadek warunków początkowych dla specyficznej klasy operatora. Faktycznie jest to podobne zagadnienie do rozważanego w pracy [66], ale mamy tutaj do czynienia z innym pomiarem czasu, nie skalą jednorodną a potęgową zmianą punktów czasu, dla których punkt $t_0 = 0$ jest punktem gęstym. Zastosowano podobną definicję nieodróżnialności stanów i obserwowalnośći w s-krokach, podobnie jak w pracy [50].

4.3.3 Nieliniowe układy sterowania z operatorami niecałkowitych rzędów

Ta część moich badań dotyczy obserwowalności i lokalnej sterowalności nieliniowych układów dyskretnych z operatorami niecałkowitych rzędów.

- W artykule [50] zbadano temat obserwowalności nieliniowych układów dyskretnych z operatorami typu Grünwalda-Letnikova niecałkowitego rzędu $\alpha > 0$:

– **D. Mozyrska(70%)**, Z. Bartosiewicz(30%). On observability of nonlinear discrete-time fractional-order control systems. Rozdz. w: *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*, Springer Science and Business Media, 2009:305–312. 7pkt.

Operator różnicowy użyty w rozważanym modelu jest typu Grünwalda-Letnikova, podobnie jak w pracach [20,23,24]: $D^\alpha x(t) = \frac{1}{c^\alpha}\sum_{j=0}^{t/c}(-1)^j\binom{\alpha}{j}x(t-jc)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ i $t \in c\mathbb{Z}$. W pracy zajmowano się układami nieliniowymi postaci: $(D^\alpha x)(k+1) = f(x(k), u(k))$, z wyjściem nieliniowym $y(k) = h(x(k))$. Najważniejsze aspekty pracy dotyczą:

– przestrzeni obserwacyjnej układu i scharakteryzwonia relacji nieodróżnialności i różnych definicji obserwowalności;

– różnych rodzajów obserwowalności: globalnej obserwowalności, lokalnej obserwowalności, lokalnej injektywności i jej mocniejszej wersji określonej przez warunek rzędu (znany jako warunek Hermanna–Krenera określany zazwyczaj dla klasycznych układów z czasem ciągłym);

– dwuwymiarowych układów nieliniowych z jednowymiarowym wyjściem zależnym tylko od jednej zmiennej;

– zależności między rzędami równań układu a warunkiem rzędu, który implikuje lokalną obserwowalność.

- W pracy [67], operatory różnicowe niecałkowitego rzędu typu Riemanna-Liouville'a, Caputo i Grünwalda-Letnikova zostały omówione i użyte do postawienia i rozwiązania dla układów z tymi operatorami problemu sterowalności nieliniwoych dyskretnych układów niecałkowitego rzędu.

  – **D. Mozyrska(60%)**, E. Pawłuszewicz(40%). Local controllability of nonlinear discrete-time fractional order systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences- Technical Sciences*, 61(1):1–6, 2013; DOI: 10.2478/bpasts-2013-0024; IF: 0,980; 5- Year IF: 0,927; 30pkt.

W wymienionej pracy badaniami objęto trzy operatory różnicowe z jednolitym rzędem $\alpha \in (0,1]$. Wykazano, że niezależnie od typu operatora, układ jest lokalnie sterowalny w q krokach, jeżeli jego aproksymacja jest globalnie sterowalna w q krokach. Użyte operatory zostały zdefiniowane w pracach: operator typu Riemanna-Liouville'a w [4], typu Caputo w [12] oraz typu Grünwalda-Letnikova w [25, 26, 91]. Uzyskane rezultaty są analogiczne do tych zawartych w pracach o układach ciągłych: [29, 30].

Poniżej podaję szkic definicji kolejnych operatorów, jako kluczowych definicji w naszych badaniach. Używam następującej notacji dotyczącej dziedzin: $\mathbb{N}_a := \{a, a+1, \dots\}$ dla dowolnego rzeczywistego a. Dla $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ określona jest funkcja czynnikowa poprzez $t^{(\alpha)} := \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)}$, gdzie $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \dots\}$, Γ jest funkcją gamma Euler'a, gdzie dzielenie przez wartość w biegunie traktujemy jako wartość zerową funkcji. Niech $\alpha > 0$. *Ułamkową sumę rzędu* α z dowolnej funkcji $\varphi : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, definiujemy następująco (za [4]):

$$\left({}_a\Delta^{-\alpha}\varphi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t-s-1)^{(\alpha-1)} \varphi(s) \, .$$

Kolejno zaprezentowano trzy operatory różnicowe niecałkowitego rzędu. Użyto wymienionych operatorów jako działających w dyskretnych układach sterowania i wykazano, że każdy z nich dopuszcza podobny warunek sterowalności. Niech $\alpha \in (0, 1]$ i $\varphi : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$.

- Działanie operatora różnicowego typu Caputo, rzędu α, na funkcji φ, określone jest następująco
$$\left({}_a\Delta_*^{\alpha}\varphi\right)(t) = \left({}_a\Delta^{-(1-\alpha)}\Delta\varphi\right)(t) \, ,$$
gdzie $t \in \mathbb{N}_{a+(1-\alpha)}$ i $(\Delta\varphi)(s) = \varphi(s+1) - \varphi(s)$.
- Działanie operatora różnicowego typu Riemanna-Liouville'a rzędu α, na funkcji φ, określone jest następująco
$$\left({}_a\Delta^{\alpha}\varphi\right)(t) = \Delta\left({}_a\Delta^{-(1-\alpha)}\varphi\right)(t) \, ,$$
gdzie $t \in \mathbb{N}_{a+(1-\alpha)}$.
- Niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Działanie operatora różnicowego typu Grünwalda-Letnikova rzędu α, na funkcji φ, określone jest następująco
$$\left({}_a\Delta_{\natural}^{\alpha}\varphi\right)(t) = \sum_{s=0}^{t-a} (-1)^s \binom{\alpha}{s} \varphi(t-s) \, ,$$

gdzie $t \in \mathbb{N}_a$.

W pracy wprowadzono wspólną formę układu sterowania postaci

$$\left({}_a\Upsilon^\alpha x\right)(t) = f(x(t+a), u(t)), \qquad x(a) = x_0, \quad t \in \mathbb{N}_0\,,$$

gdzie $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ oznacza wektor stanu, wartości $u(t)$ sterowania u są elementami pewnej przestrzeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ oraz

$$\left({}_a\Upsilon^\alpha x\right)(t) = \begin{cases} ({}_\mu\Delta^\alpha_* x)(t) \text{ lub } ({}_\mu\Delta^\alpha x)(t) & \text{dla } a = \mu \\ ({}_0\Delta^\alpha_\natural x)(t+1) & \text{dla } a = 0 \end{cases}.$$

Przykład 4.1 *Rozważmy układ postaci*

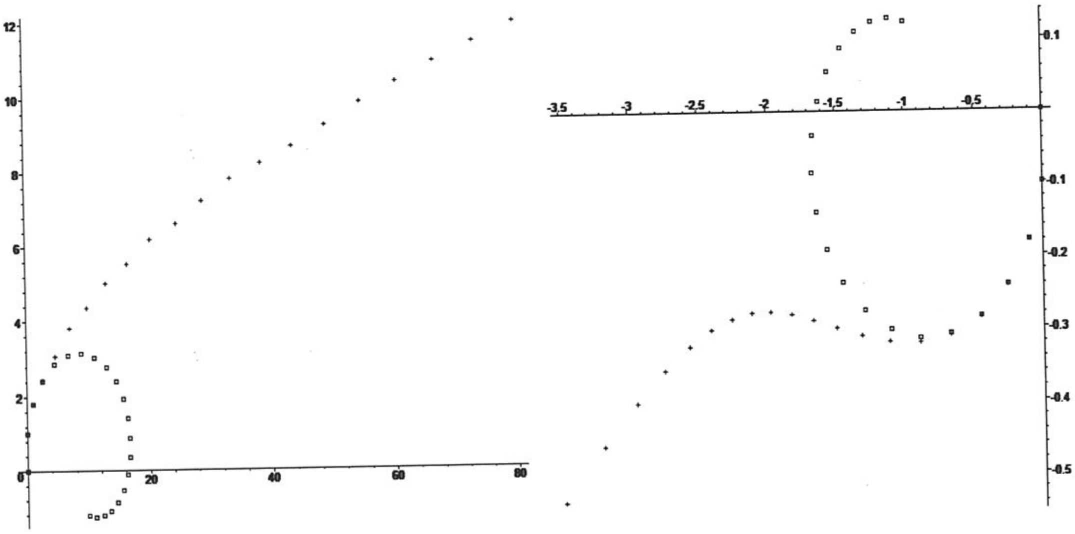
$$\left({}_a\Upsilon^\alpha x\right)(t) = \begin{bmatrix} x_2(t+a) \\ -0.1 \sin x_1(t+a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\,.$$

Wtedy jego linearyzacja jest określona za pomocą następujących macierzy: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Łatwo zauważyć, że układ* $\left({}_a\Upsilon^\alpha x\right)(t) = Ax(t+a) + Bu(t)$ *jest sterowalny w* $q = 2$ *krokach. Wybierając warunek początkowy* $x_0 = 0$, *mamy dwie możliwości (operatory typu Riemanna-Liouville'a i Caputo z zerowym warunkiem początkowym pokrywają się). Niech:* $u(t) \equiv -0.1$, $\alpha = 0.8$. *Rysunki 1(a), 1(b) wskazują na porównanie zachowań trajektorii zarówno przy zmianie opertaora jak i linearyzacji lub rozwiązania bezpośredniego przez rekurencję.*

- Aproksymacja rozwiązań zagadnień początkowych postawionych dla układów niecałkowitych rzędów z czasem ciągłym z operatorem sekwencyjnym typu Caputo została omówiona w pracy [60]

  - **D. Mozyrska(40%)**, E. Girejko(30%), M. Wyrwas(30%). Fractional nonlinear systems with sequential operators. *Central European Journal of Physics*, 11(10):1295–1303, 2013; DOI: 10.2478/s11534-013-0223-3; IF: 0.905; 5-Year IF 0.832; 20pkt.

Aproksymacja rozwiązań układów ciągłych za pomocą układów dyskretnych z wystarczająco małym krokiem próbkowania jest ważnym aspektem symulacji wielu procesów. Problem obliczeń przybliżonych dla pochodnych niecałkowitego rzędu typu



(a) operator ${}_a\Upsilon^{0.8}x =_{(-0.2)} \Delta_*^{0.8}x$ (b) operator ${}_a\Upsilon^{0.8}x =_0 \Delta_\natural^{0.8}x$.

Rysunek 1: Porównanie dwóch trajektorii układów nieliniowych z Przykładu 4.1. Punkty dla 10 kroków, układ nieliniowy - "krzyżyki" , linearyzacja - "kwadraciki", $u \equiv -0.1$.

Riemanna-Liouville'a i Caputo został omówiony w pracy [14]. W artykule zaprezentowano metodę opartą na przybliżeniu pochodnej typu Caputo poprzez h-różnicowy operator określony w [55]. W omawianej pracy [60], określono układ aproksymujący i udowodniono zbieżność wartości operatorów. Udowodnione warunki mają postać:

Stwierdzenie 4.1 *Wartości rozwiązania x zagadnienia początkowego*

$$\left({}_0^C D^\alpha x\right)(t) = f(t, x(t))\,, \quad x(0) = x_0\,.$$

są przybliżane wartościami rozwiązania następującego zagadnienia dyskretnego

$$\left({}_a\Delta_{h,*}^\alpha \overline{x}\right)(t) = f(t, \overline{x}(t))\,, \quad \overline{x}(a) = x_0\,.$$

poprzez następującą granicę $\lim_{h\to 0} \overline{x}(t_h) = x(t)$*, gdzie* $\overline{t}_h := a + (1-\alpha)h + nh$*,* $n = \left[\frac{t-a}{h}\right] + 1$ *i* $a = (\alpha - 1)h$*,* $\alpha \in (0, 1]$.

Stwierdzenie 4.2 *Niech* $\alpha, \beta \in (0, 1]$*. Wartości rozwiązania x układu*

$$\left({}_0^C D^\beta \left({}_0^C D^\alpha x\right)\right)(t) = f(t, x(t))\,,$$

z warunkami początkowymi $\left({}_0^C D^\alpha x\right)(0) = x_0\,,\ x(0) = x_a$ *są przybliżane wartościami rozwiązania następującego zagadnienia dyskretnego*

$$\left({}_a\Delta^\alpha_{h,*}x\right)(nh) = y(nh+b)\,,\quad \left({}_b\Delta^\beta_{h,*}y\right)(nh) = f(nh, x(nh+a))\,,$$

$\left({}_a\Delta^\alpha_{h,*}x\right)(0) = x_0\,,\ x(a) = x_a\,,$ *poprzez następującą granicę* $\lim_{h\to 0}\overline{x}(t_h) = x(t)\,,$ *gdzie* $\overline{t}_h := a + (1-\alpha)h + nh$, $n = \left[\frac{t-a}{h}\right] + 1$ *i* $a = (\alpha - 1)h$, $b = (\beta - 1)h$.

4.3.4 Wieloparametryczne liniowe układy sterowania z czasem dyskretnym i operatorami niecałkowitych rzędów

Własności sum i operatorów dyskretnych niecałkowitego rzędu były rozwijane najpierw przez Millera i Rossa, [36], idea kontynuowana była następnie w pracach Atici i Eloe [4,5], Baleanu i Abdeljawada [1,2]. Koncepcja nieco innego zapisu operatora typu Riemanna-Liouville'a i sumy ułamkowej została podana w pracach [6,7,16]. Trzecim typem operatora, który jest w moich badaniach rozważany, jest operator typu Grünwalda-Letnikova, używany w modelowaniu układów sterowania przez autorów: Kaczorek, Bettayeb and Djennoune, Busłowicz, Dzieliński, Klamka, Ostalczyk [9,10,15,24,26,27,30,84,85,93]. W opracowaniu rezultatów podstawą jest rozważenie operatora h-różnicowego. Ponieważ $h > 0$ może reprezentować krok próbkowania, to występowanie wielkości h w definicji operatorów jest interesujące zarówno z punktu widzenia zastosowań inżynierskich jak i obliczeń numerycznych.

- Własności sterowalności i obserwowalności układów liniowych z dopuszczeniem różnych rzędów w każdym równaniu i różnego kroku h, zostały ujęte w pracy
  - **D. Mozyrska**. Multi–parameter fractional difference linear control systems, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, V. 2014(Article ID 183782):8p., DOI: 10.1155/2014/183782 2014.; IF: 0.82; 5-Year IF: 0.84, 30pkt.
- Sterowalność liniowych układów h-różnicowych z dwoma rzędami jest tematem pracy:
  - **D. Mozyrska(60%)**, E. Pawłuszewicz(40%). Controllability of h-difference linear control systems with two fractional orders. *International Journal of Systems Science*, 2013; DOI: 10.1080/00207721.2013.794907; IF: 1.305; 5-Year IF: 1.504; 25pkt.

W pracy [39], gdzie rozważane są układy z różnymi rzędami wprowadzamy dwie rodziny funkcji, które pomogą nam w określeniu rozwiązań jawnych zagadnień początkowych z trzema omawianymi operatorami. W szczególności podkreślono fakt, [39], że operatory typu Riemanna-Liouville'a i Grünwalda-Letnikova określają podobne układy, różnica polega jedynie na definicji dziedziny czasu. W przypadku operatora Riemanna-Liouville'a czasem startu jest wartość $a = (\alpha - 1)h$. Natomiast wartości rozwiązań w przypadku zachowania tych samych macierzy układu są te same. Jednakże, dopiero użycie teorii powiązanej wcześniej tylko z operatorem typu Riemanna-Liouville'a pozwoliło na określenie rozwiązań jawnych dla układów z operatorem typu Grünwalda-Letnikova. W takiej sytuacji można ustalić i udowdnić warunki sterowalności i obserwowalności wieloparametrowych (różne rzędy i kroki) układów liniowych używając rozwiązań jawnych, nierekurencyjnych. Idea użycia układów z różnymi rzędami i krokiem w każdym równaniu jest najbardziej ogólną sytuacją. Można wówczas korzystać z tych samych wyników dla $h = 1$ i jednolitego rzędu. Wykazano ponadto, że uzyskane rezultaty nie zależą od typu operatora i kroku h. Dokonano porównania układów z różnymi operatorami pod względem: (a) liczby kroków potrzebnych do osiągnięcia założonego punktu docelowego, (b) rozróżnienia warunków początkowych dla poszczególnych operatorów.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo – badawczych

Od początku podjęcia pracy na Politechnice Białostockiej moja działalność naukowa koncentrowała się na teorii sterowania układów ciągłych i dyskretnych. Możliwość uczestnictwa w seminarium z geometrycznej teorii sterowania, prowadzonym w Instytucie Matematyki Polskiej Akademii Nauk, w Warszawie, organizowanym przez prof. Bronisława Jakubczyka i prof. Witolda Respondka pozwoliła mi na zdobycie odpowiedniej wiedzy w zakresie badań i użycia metod algebraicznych i geometrycznych w teorii sterowania, w moim przypadku w szczególności w pojęciu obserwowalności. W mojej rozprawie doktorskiej, [40], napisanej pod opieką prof. Zbigniewa Bartosiewicza, badałam zagadnienie lokalnej obserwowalności układów nieskończenie wymiarowych skończenie określonych z wyjściem. Pojęcie *„skończenie określonych”* oznacza, iż każda funkcja współrzędna układu zależy od skończonego kompletu zmiennych stanu a sam stan jest nieskończenie wymiarowy. Warunek początkowy natomiast pochodzi także z przestrzeni wektorów o skończonej liczbie elementów niezerowych (jest to szczególny przypadek przestrzeni Frécheta).

Przed doktoratem pracowaliśmy głównie nad rezultatami dotyczącymi stabilnej lokalnej obserwowalności skończenie–wymiarowych układów sterowania z wyjściem, opierając wyniki na zastosowaniu twierdzenia Risler'a o zerach. Prace dotyczące tych wyników to: [41–43]. Badaliśmy różne koncepcje obserwowalności, takie jak: globalna obserwowalność, lokalna obserwowalność, lokalna injektywność. Lokalna obserwowalność układu w punkcie x_0 oznacza, że używając funkcji z przestrzeni obserwacyjnej danego układu możemy odróżnić punkty/warunki początkowe z otoczenia punktu x_0. Stabilna lokalna obserwowalność układu w punkcie x_0, oznacza natomiast, że dany układ jest lokalnie obserwowalny w pewnym otoczeniu punktu x_0. W mojej rozprawie doktorskiej, [40] oraz w pracy [44] badaliśmy możliwość opisu układów nieskończenie wymiarowych skończenie określonych. W tym celu udowodniliśmy odpowiednią wersję twierdzenia Risler'a o zerach dla przestrzeni ciagów skończenie określonych.

Możliwość implementcaji rezultatów o obserwowalności zarówno dla układów z czasem ciągłym i dyskretnym pozwoliła na przeniesienie wyników na układy określone na skalach czasowych, [47, 48], gdzie też omówiono temat dualności własności sterowalności i obserwowalności. W pracach [45, 46] znajdują się monografie na temat obserwowalności liniowych i nieliniowych skończenie wymiarowych układów sterowania. W pracy [49] omawiano linearyzację Carlemana układów wielomianowych.

W latach 2008-2009 i częściowo w roku 2010, zajmowałam się szeregami funkcyjnymi i wielomianami na skalach czasowych, [61, 62], a także własnościami wybranych funkcji na skalach, np. odpowiednika logarytmu naturalnego, pochodną diamentową (kombinacja wypukła pochodnej delta i nabla) na skalach czasowych, całką Riemanna-Stieltjesa oraz warunkami viabilności (ogólny przypadek niezmienniczości) układów dynamicznych na skalach czasowych, [18, 68–72, 87, 96]. Część rezultatów została uzyskana w ramach współpracy z grupą Control Theory Group from the Centre for Research on Optimization and Control-CEOC Uniwersytetu w Aveiro, Portugalia, (obecnie Mathematical Theory of Systems and Control, Center of Research and Development in Mathematics and Applications), głównie z prof. Delfimem F. M. Torresem.

Od 2010 roku prowadzę badania w zakresie układów sterowania z pochodną lub operatorem różnicowym niecałkowitego rzędu. Dziedziną układów niecałkowitych rzędów/układów ułamkowych zainteresowałam się dzięki dwóm wykładom:

(a) prezentacja prof. D.F. M. Torresa w czasie Podlaskiej Konferencji Matematyki, 2006r., Białystok; (b) wygłoszonym przez prof. T. Kaczorka w ramach seminairum Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej. Seminarium dotyczyło operatora niecałkowitego rzędu typu Grünwalda-Letnikova i jego zastosowań w układach sterowania.

Aby zintensyfikować zgłębianie nowej dziedziny, jaką był dla mnie wtedy rachunek różniczkowy i całkowy niecałkowitego rzędu, zgłosiłam kurs z tego zakresu do African University of Science and Technology w Abuja, Nigeria. Wtedy też została napisana praca dotycząca różnych definicji obserwowalności nieliniowych układów dyskretnych z operatorem Grünwalda-Letnikova, [50]. Następnie kontynuowałam pracę w zakresie układów ułamkowych, ale z czasem ciągłym, [73, 74]. W wymienionych artykułach skonstruwaliśmy formułę sterowania odpowiadającą minimalizacji energii dla układów z pochodną Riemanna-Liouville'a i pochodną Caputo.

Badania dotyczące układów z czasem ciągłym związane były także z viabilnością rozwiązań a w szczególności z dodatniością rozwiązań lub podejściem bardziej ogólnym przez układy stożkowe, [19, 57, 58]. Artykuł [57] zawiera w swoim tytule słowo „initialization", ale to nawiązanie pochodzi od startu układu w warunku początkowym danym w środku przedziału w czasie początkowym większym od czasu startu pochodnej. W pracy [58] zajęłam się układami stożkowymi z pochodną Caputo. Układ nazywamy dodatnim, jeżeli jego trajektorie pozostają nieujemne, startując z nieujemnego stanu początkowego. Jest to przypadek szczególny niezmiennniczości/viabilności (gdyż rozwiązania są jednoznacze). W tym przypadku można mówić o dodatniej viabilności, gdy zbiór względem którego określamy viabilność, to nieujemna część przestrzeni stanu. Obecnie pracuję (wraz z zespołem współautorów) nad warunkiem koniecznym i wystarczjącym na viabilność układów niecałkowitego rzędu, z czasem ciągłym i pochodną Caputo.

Jedną z bardziej interesujących kwestii jest wypracowanie definicji pochodnej niecałkowitego rzędu dla skal czasowych, czyli unifikacja podejść: układy z czasem ciągłym i dyskretnym na układy na dowolnej skali czasowej. Jest to nadal problem otwarty. Jedno z podejść zaprezentowano w pracy [8].

W artykułach: [17, 53, 54, 56, 100] otrzymano rezultaty związane z istnieniem i jednoznacznością zagadnień początkowych, rozwiązań układów stożkowych i zachowań trajektorii z pochodnymi sekwencyjnymi z dowolnym krokiem $h > 0$. Główne teamtyka prac: [64, 65], podobnie jak w [63, 66], to układy z pamięcią początkową i operatorem niecałkowitego rzędu na skali quantum ($q^{\mathbb{Z}}$).

Podstawowe wiadomości dotyczące operatorów dyskretnych niecałkowitego rzędu z krokiem h wraz z podaniem definicji operatora typu Caputo dla kroku $h >$ przedstawiono w pracy [55]. Porównanie h-różnicowych operatorów typu: Grünwalda-Letnikova, Caputo, Riemanna-Liouville'a zostało przeprowadzone w [38, 59].

Zagadnienie sterowalności, sterowalności z ograniczeniami oraz obserwowalności w skończonej liczbie kroków działania h-różnicowych liniowych układów sterowania z dwoma różnymi rzędami postawiono i rozwiązano w [86, 88–90]. Rozważono tam układy z operatorem typu Caputo i krokiem $h > 0$, sterowaniami o wartościach z danego wypukłego i ograniczonego zbioru. Podano warunek konieczny i wystarczający sterowalności z ograniczeniami, w skończonej liczbie kroków działania układu.

Jedną z ważnych własności układów sterowania jest stabilność i stabilizowalność. Ze względu na brak wygodnej reguły dla pochodnej niecałkowitego rzędu oraz operatora różnicowego niecałkowitego rzędu działania na funkcji złożonej, trudno jest bezpośrednio wypracować warunki stabilności typu Lapunova. Pewne wyniki, będące też ekeperymentami numerycznymi zawarto w [97, 98, 101].

Często stosowanym narzędziem w liniowych układach sterowania jest zaprezentowanie warunków i funkcji tranzycji z sygnałów w dziedzinie zespolonej. W tym celu powstały prace, złożone do publikacji i jako materiały konferencyjne na konferencję FDA 2014, na temat rozwiązań ułamkowych układów liniowych z czasem dyskretnym i operatorami typu: Riemanna–Liouville'a i Caputo, dla jednolitego rzędu $\alpha > 0$ i kroku $h > 0$ poprzez zastosowanie metody operatorowej. Użyto klasycznej $\mathcal{Z}$-transformaty, udowodniono wzór obrazu uogólnionej funkcji Mittaga-Lefflera (odpowiednik eksponenty dyskretnej ułamkowego rzędu), [75, 76, 99].

Jedną z form działalności naukowo-badawczej było moje uczestnictwo w latach 2008-2009 w projekcie ACFA 2020 – Active Control for Flexible 2020 Aircraft (2008-2011) z 7. Programu Ramowego, www.acfa2020.eu, gdzie pracowałam jako wykonawca w zespole z Politechniki Białostockiej w składzie: prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz - kierownik, dr Dorota Mozyrska - wykonawca. W pracach projektowych prowadziliśmy część badawczą dotyczącą optymalizacji jednego z parametrów modelu samolotu poprzez adaptacyjne sterowanie wyprzedzające (adaptive feed–forward control). Pozwoliło mi to na podniesienie umiejętności implementacji algorytmów optymalizacji w programie Matlab/Simulink.

Inną częścią mojej pracy badawczej była tematyka dotycząca aproksymacji, inerpolacji i modelowania danych spektroradiometrycznych z pomiarów LEDów, [51, 52, 77–79].

Uwaga 5.1 *Wykaz opublikowanych prac naukowych oraz informacja o osiągnięciach dydaktycznych, współpracy naukowej i popularyzacji nauki stanowi Załącznik 4.*

Literatura

[1] T. Abdeljawad and D. Baleanu. Fractional differences and integration by parts. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 13(3):574–582, 2011.

[2] T. Abdeljawad, F. Jarad, and D. Baleanu. A semigroup-like property for discrete Mittag-Leffler functions. *Advances in Difference Equations*, 72, 2012.

[3] M. H. A. Annaby and Z. S. Mansour. *q-Fractional calculus and equations*. Heidelberg, Springer, Berlin 2012.

[4] F. M. Atıcı and P. W. Eloe. A transform method in discrete fractional calculus. *International Journal of Difference Equations*, 2:165–176, 2007.

[5] F. M. Atıcı and P. W. Eloe. Initial value problems in discrete fractional calculus. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(3):981—-989, March 2009.

[6] N. R. O. Bastos, R. A. C. Ferreira, and D. F. M. Torres. Discrete-time fractional variational problems. *Signal Processing*, 91(3):513–524, 2011.

[7] N. R. O. Bastos, R. A. C. Ferreira, and D. F. M. Torres. Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 29(2):417–437, 2011.

[8] N. R. O. Bastos, D. Mozyrska, and D. F. M. Torres. Fractional derivates and integrals on time scales via the inverse generalized Laplace transform. *International Journal of Mathematic and Computation*, J(11):1–9, 2011.

[9] M. Bettayeb and S. Djennoune. A note on the controllability and the obseravbility of fractional dyanmical systems. In *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application*, Porto, Portugal, July 19–21 2006.

[10] M. Busłowicz. Stability of fractional discrete-time linear scalar systems with one delay. *Pomiary, Automatyka, Robotyka*, R. 17, nr 2:327–332, 2013.

[11] R. Caponetto. *Fractional order systems : modeling and control applications.* World Scientific, Singapore 2010.

[12] F. Chen, X. Luo, and Y. Zhou. Existence results for nonlinear fractional difference equation. *Advances in Difference Equations*, 2011:12 pages, 2011. doi: 10.1155/2011/713201.

[13] K. Diethelm. *The analysis of fractional differential equations : an application-oriented exposition using differential operators of caputo type.* Springer-Verlag, Berlin 2010.

[14] K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed, and Y. Luchko. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194:743–773, 2005.

[15] D. Dzieliński and P. M. Czyronis. Fixed final time and free final state optimal control problem for fractional dynamic systems – linear quadratic discrete-time case. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 61(3):681–690, 2013.

[16] R. A. C. Ferreira and D. F. M. Torres. Fractional h-difference equations arising from the calculus of variations. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 5(1):110–121, 2011.

[17] E. Girejko and D. Mozyrska. Semi-linear fractional systems with Caputo type multistep differences. *Carpathian Journal of Mathematics*, (2), 2014.

[18] E. Girejko, D. Mozyrska, and M. Wyrwas. Contingent epiderivatives of functions on time scale. *Journal of Convex Analysis*, 18(4):1047–1064, 2011.

[19] E. Girejko, D. Mozyrska, and M. Wyrwas. A sufficient condition of viability for fractional differential equations with the Caputo derivative. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 381(1), 2011.

[20] S. Guermah, S. Djennoune, and M. Bettayeb. Asymptotic stability and practical stability of linear discrete-time fractional order systems. In *3rd IFAC Workshop on Fractional differentiation and its Applications*, Ankara, Turkey, 2008.

[21] T. T. Hartley and C. F. Lorenzo. Dynamics and control of initialized fractional-order systems. *Nonlinear Dynamics*, (29):201–233, 2002.

[22] R. Herrmann. *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists.* World Scientific Publishing Company, February 2011.

[23] T. Kaczorek. Fractional positive continuous–time linear systems and their reachability. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 18(2):223–228, 2008.

[24] T. Kaczorek. Reachability and controllability to zero tests for standard and positive fractional discrete-time systems. *Journal European des Systemes Automatises*, 42(6–8):769–787, 2008.

[25] T. Kaczorek. Fractional positive linear systems. *Kybernetes*, 38(7/8):1059–1078, 2009.

[26] T. Kaczorek. *Selected problems of fractional systems theory*, volume 411. Springer, 2011.

[27] Tadeusz Kaczorek. Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 56(4):313–317, 2008.

[28] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations.* North–Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2006.

[29] J. Klamka. Controllability of nonlinear discrete systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 12(2):173–180, 2002.

[30] J. Klamka. Local controllability of fractional discrete-time semilinear systems. *Acta Mechanica et Automatica*, 5(2):55–58, 2011.

[31] M. Klimek. *On solutions of linear fractional differential equations of variational type.* The Publishing Office of Czestochowa University of Technology, Czestochowa 2009.

[32] V. Lakshmikantham, S. Leela, and J. V. D. Cottenham. *Theory of fractional dynamic systems.* Cambridge Scientific Publishers, 2009.

[33] J. S. Leszczyński. *An introduction to fractional mechanics.* The Publishing Office of Czestochowa University of Technology, New Jersey 2011.

[34] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley. Initialization of fractional differential equations: background and theory. *2007 Proceedings of the ASME International Design Engineering Conference*, DETC2007 5PART B:1325–1333, 2008.

[35] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley. Initialization of fractional-order operators and fractional differential equations. *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, 3(2):9 art. no. 021101, 2008.

[36] K. S. Miller and B. Ross. Fractional difference calculus. *Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus and their Applications, Nihon University, Kōriyama, Japan*, pages 139–152, 1988.

[37] W. Mitkowski. Approximation of fractional diffusion-wave equation. *Acta Mechanica et Automatica*, 5(2):65–68, 2011.

[38] D. Mozyrska. Difference fractional linear initial value problems. In Theodore E. Simos, editor, *International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics: ICNAAM'2012*, volume 1479 of *AIP Conference Proceedings*, pages 1412–1415, Kos (Greece), September 2012. American Institute of Physics.

[39] D. Mozyrska. Multi–parameter fractional difference linear control systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014(Article ID 183782):8p., 2014.

[40] D. Mozyrska. Local observability of inifinite finitely defined dynamical sytems with an output. *PhD Thesis*, Warsaw:2001, Warsaw University of Technology.

[41] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. Rank condition of stable local observability of analytic systems on ir2. *Zesz. Nauk. PBiałost. Archit.*, 16:143–149, 1996.

[42] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. Twierdzenie o zerach w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych =the theorem of zeros in infinite - dimensional spaces. *Zesz. Nauk. PBiałost. Mat*, 19:25–35, 1999.

[43] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. Algebraic criteria for stable local observability of analytic systems on irn. In *Proceedings of the First International Conference Control and Self-organization in Nonlinear Systems : CSNS'2000*, pages 13–18, Białystok-Suprasl, February 15-18 2000. Bialystok University of Technology.

[44] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. Families of germs in local observability of infinite-dimensional. In *Proceedings of the First International Conference Control and Self-organization in Nonlinear Systems : CSNS'2000*, pages 13–18, Białystok-Suprasl, February 15-18 2000. Bialystok University of Technology.

[45] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. Observability. In University of Aveiro Universidade de Aveiro. Departamento de Matemática, editor, *Cadernos de Matemática*, chapter Nonlinear finite-dimensional systems, pages 19–34. CM 05/D-04, 2005.

[46] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. Observability. In University of Aveiro Universidade de Aveiro. Departamento de Matemática, editor, *Cadernos de Matemática*, chapter Linear finite-dimensional systems, pages 3–18. CM 05/D-04, 2005.

[47] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. Dualities for linear control differential systems with infinite matrices. *Control and Cybernetics*, 35(4):887–904, 2006.

[48] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. Observability of a class of linear dynamic infinite systems on time scales. *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 4:347–358, 2007.

[49] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. In Manuel Guerra Maria do Rosario Grossinho Andrew Sarychev, Albert Shiryaev, editor, *Mathematical control theory and finance*, chapter Carleman linearization of linearly observable polynomial systems, pages 311–323. Springer-Verlag, 2008.

[50] D. Mozyrska and Z. Bartosiewicz. *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*, chapter On observabilibty of nonlinear discrete-time fractional-order control systems, pages 305–312. Springer Science and Business Media, 2009.

[51] D. Mozyrska and I. Fryc. Dokładnosc wyznaczania wartosci posrednich w zmierzonym rozkladzie egzytancji widmowej promieniowania optycznego a przyjeta metoda interpolacji i aproksymacji. *Przegląd Elektrotechniczny*, 85(11):253–256, 2009.

[52] D. Mozyrska and I. Fryc. Approximation of spectroradiometric data by fractional model. *Przegląd Elektrotechniczny*, 87(2):255–257, 2011.

[53] D. Mozyrska and E. Girejko. Cone solutions of multi-order fractional difference systems. In Wen Chen, HongGuang Sun, and Dumitru Baleanu, editors, *5th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications: FDA'12*, Nanjing (China), May 2012. Hohai University.

[54] D. Mozyrska and E. Girejko. Positivity of fractional discrete systems with sequential h-differences. In *4th IEEE International Conference on Nonlinear Science and Complexity*, pages 137–139, Óbuda University (Budapeszt, Hungary, August 2012. Óbuda University.

[55] D. Mozyrska and E. Girejko. *Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory: The Stefan Samko Anniversary Volume*, volume 229, chapter Overview of the fractional h-difference operators, pages 253–267. Springer, 2013.

[56] D. Mozyrska and E. Girejko. Cone solutions of multi-order fractional difference systems. *Control and Cybernetics*, 42(2):419–429, 2013.

[57] D. Mozyrska, E. Girejko, and M. Wyrwas. A necessary condition of viability for fractional differential equations with initialization. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(9):3642–3647, 2011.

[58] D. Mozyrska, E. Girejko, and M. Wyrwas. Nonlinear fractional cone systems with the Caputo derivative. *Applied Mathematics Letters*, 25(4), 2012.

[59] D. Mozyrska, E. Girejko, and M. Wyrwas. Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems. In W. Mitkowski, J. Kacprzyk, and J. Baranowski, editors, *Lecture Notes in Electrical Engineering*, volume 257, chapter Comparison of h-difference fractional operators, pages 191–197. Springer, 2013.

[60] D. Mozyrska, E. Girejko, and M. Wyrwas. Fractional nonlinear systems with sequential operators. *Central European Journal of Physics*, 11(10):1295–1303, 2013.

[61] D. Mozyrska and E. Pawluszewicz. Functional series on time scales. *International Journal of Mathematics and Statistics*, 2(S08):94–105, 2008.

[62] D. Mozyrska and E. Pawluszewicz. Hermite's equations on time scales. *Applied Mathematics Letters*, 22:1217–1219, 2009.

[63] D. Mozyrska and E. Pawłuszewicz. Observability of linear q-difference fractional-order systems with finite initial memory. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 58(4):601–605, 2010.

[64] D. Mozyrska and E. Pawłuszewicz. Linear q-difference fractional-order control systems with finite memory. *Acta Mechanica et Automatica*, 5(2):69–73, 2011.

[65] D. Mozyrska and E. Pawłuszewicz. *Postępy automatyki i robotyki*, chapter Obserwowalność liniowych układów dyskretnych niecałkowitego rzędu ze skończoną pamięcią, pages 537–544. Kielce: Wydaw. Politechniki Świętokrzyskiej, 2011.

[66] D. Mozyrska and E. Pawłuszewicz. Fractional discrete-time linear control systems with initialisation. *International Journal of Control*, 85(2):213–219, 2012.

[67] D. Mozyrska and E. Pawłuszewicz. Local controllability of nonlinear discrete-time fractional order systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, 61(1):1–6, 2013.

[68] D. Mozyrska, E. Pawłuszewicz, and D. F. M. Torres. The Riemann-Stieltjes integral on time scales. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(1):1–14, 2010.

[69] D. Mozyrska, E. Pawłuszewicz, and D. F. M. Torres. Inequalities and majorisations for the Riemann-Stieltjes integral on time scales. *Mathematical Inequalities and Applications*, 14(2):281–293, 2011.

[70] D. Mozyrska and D. F. M. Torres. Diamond-alpha polynomial series on time scales. *International Journal of Mathematics and Statistics*, 5(A09):92–102, 2009.

[71] D. Mozyrska and D. F. M. Torres. The natural logarithm on time scales. *Journal of Dynamical Systems & Geometric Theories*, 7:41–48, 2009.

[72] D. Mozyrska and D. F. M. Torres. A study of diamond-alpha dynamic equations on regular time scales. *African Diaspora Journal of Mathematics*, 8(1):35–47, 2009.

[73] D. Mozyrska and D. F. M. Torres. Minimal modified energy control for fractional linear control systems with the Caputo derivative. *Carpathian J. Math.*, 26(2):210–221, 2010.

[74] D. Mozyrska and D. F. M. Torres. Modified optimal energy and initial memory of fractional continuous-time linear systems. *Signal Processing*, 91(1):379–385, 2011.

[75] D. Mozyrska and M. Wyrwas. Solutions of fractional linear difference systems with Riemann-Liouville type operator via transform method. *submitted to FDA 2014*, 2014.

[76] D. Mozyrska and M. Wyrwas. Z–transforms of delta type fractional operators. *submitted to International Journal of Applied Mathematics & Computer Science*, 2014.

[77] D. Mozyrska, M. Wyrwas, and I. Fryc. Metody numerycznego opisu rozkładu egzytancji widmowej iluminantu D65 z uwzględnieniem niepewności pomiarowych wnoszonych przez użyty spektoradiometr. *Przegląd Elektrotechniczny*, 87(4):66–68, 2011.

[78] D. Mozyrska, M. Wyrwas, and I. Fryc. Nieliniowe modele pomiarowe rozkładu egzytancji widmowej ciała czarnego. *Przegląd Elektrotechniczny*, 87(4):116–119, 2011.

[79] D. Mozyrska, M. Wyrwas, and I. Fryc. Wyznaczanie parametrów kolorymetrycznych LEDa w pełnym zakresie temperatur pracy. *Przegląd Elektrotechniczny*, 88(4a):232–234, 2012.

[80] K. Nishimoto. *Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order.* University of New Haven Press, New Haven 1989.

[81] K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus.* Academic Press, New York, 1974.

[82] M. D. Ortigueira. *Fractional calculus for scientists and engineers.* Springer, Dordrecht 2011.

[83] M. D. Ortigueira and F. J. Coito. System initial conditions vs derivative initial conditions. *Comput. Math. Appl.*, 59(5):1782–1789, 2010.

[84] P. Ostalczyk. *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce.* The Publishing Office of Lodz University of Technology, Lodz 2008.

[85] P. Ostalczyk. Equivalent descriptions of a discrete–time fractional–order linear system and its stability domains. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 22(3):533—-538, 2012.

[86] D. Pawłuszewicz, E. amd Mozyrska. Controllability of h-difference linear control systems with two fractional orders. In Ivo Petráš, Igor Podlubny, Karol Kostúr, Ján Kačúr, and Andrea Mojžišová, editors, *13th International Carpathian Control Conference: ICCC'2012*, pages 501–506, Podbanské, May 2012. Technical University of Košice et al.

[87] E. Pawluszewicz and D. Mozyrska. Nonlinear analysis and optimization ii: Optimization: A conference in celebration of Alex Loffe's 70th and Simeon Reich's 60th birthdays. In I. Shafrir A. J. Zaslavski Ramat-Gan A. Leizarowitz, B. S. Mordukhovich, editor, *Contemporary Mathematics*, chapter Delta and nabla monomials and generalized polynomial series on time scales, pages 199–211. 2010.

[88] E. Pawluszewicz and D. Mozyrska. Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems. In W. Mitkowski, J. Kacprzyk, and J. Baranowski, editors, *Lecture Notes in Electrical Engineering*, volume 257, chapter Constrained controllability of h-difference linear systems with two fractional orders, pages 67–76. Springer, 2013.

[89] E. Pawluszewicz and D. Mozyrska. Observability of h-difference linear control systems with two fractional orders. In *Proceedings of the 14th International Carpathian Control Conference ICCC'2013*, 2013.

[90] E. Pawluszewicz and D. Mozyrska. Two types of controllability of h-difference linear systems with two fractional orders. In *Proceedings of The 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'2013*, 2013.

[91] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, 1999.

[92] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers S.A., Yverdon, 1993.

[93] D. Sierociuk and D. Dzieliński. Fractional Kalman filter algorithm for the states parameters and order of fractional system estimation. *Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.*, 16(1):129–140, 2006.

[94] V. E. Tarasov. *The analysis of fractional differential equations : an application-oriented exposition using differential operators of caputo type.* Heidelberg : Springer, 2010.

[95] S. Westerlund. Dead matter has memory. *Phys. Scr.*, 43(2):174, 1991.

[96] M. Wyrwas, E. Girejko, and D. Mozyrska. Subdifferentials of convex functions on time scales. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 29(2):671–691, 2011.

[97] M. Wyrwas, E. Girejko, and D. Mozyrska. Stability of the Caputo fractional order difference systems. In *5th Podlasie Conference on Mathematics*, Białystok, Poland, June 25–28 2012.

[98] M. Wyrwas, E. Girejko, D. Mozyrska, and E. Pawłuszewicz. Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems. In W. Mitkowski, J. Kacprzyk, and J. Baranowski, editors, *Lecture Notes in Electrical Engineering*, volume 257, chapter Stability of fractional difference systems with two orders, pages 41–52. Springer, 2013.

[99] M. Wyrwas and D. Mozyrska. Solutions of fractional linear difference systems with Caputo type operator via transform method. *submitted to FDA 2014*, 2014.

[100] M. Wyrwas, D. Mozyrska, and E. Girejko. On solutions to fractional discrete systems with sequential h-differences. *Abstract and Applied Analysis*, online - Article ID 475350:11p., 2013.

[101] M. Wyrwas, D. Mozyrska, and E. Girejko. Stability of discrete fractional-order nonlinear systems with the nabla Caputo difference. In *IFAC Joint Conference: 5th Symposium on System, Structure and Control: SSSC'2013, 11th Workshop on Time-delay Systems, 6th Workshop on Fractional Differentiation and its Applications,*

pages 167–171, Grenoble, February 2013. International Federation of Automatic Control.